MEMORIA

SOPRA ALCUNE

RICERCHE ANALITICHE

DI

ALBERTO CORTES

PROFESSORE DI MATEMATICA PURA, E MISTA NEL REAL COLLEGIO DI CAMPOBASSO.



NAPOLI

Nel Gabinetto Bibliografico e Tipografico

1831.

Ogni esemplare di questa memoria, nel quale manchi la firma dell' autore, e del librajo, sarà tenuto per contraffatto.

AL MIRABILE GIOVANETTO SICILIANO

VINCENZO ZUCCHERO

Non potrei meglio impiegar queste pagine che a te dedicandole, cui diè natura sì alte prerogative da eccitare la comune meraviglia in un'età ov'altri ancora bamboleggia. Sacro amore di patria a ciò più volentieri mi determina; poichè la Terra sempre feconda di Genii, la Terra degli Archimedi, de' Maurolici, e de' Piazzi ha dato ad entrambi i natali. Possano le mie fatighe esercitare un giorno l'acume del tuo intelletto, ed esserti di eccitamento a più sublimi ricerche. La tua vivace fantasia, la riflessione rapida, e profonda, l'intelligenza capace delle più grandi combinazioni, tutto in te ci annunzia un Genio creatore, e tutte le circostanze ti son favorevoli per divenirlo. Tu sei, la Dio mercè, in un paese i cui abitatori si recano a vanto l'onorare gl' ingegni, e promuoverne la riuscita con ogni maniera d'incoraggiamen-

to. Chiara testimonianza n'è il largo assegnamento a te concesso, onde nel coltivare il tuo genio nascente non abbi a lottar col bisogno. Tu sei nel tempo che un monarca giovine d' anni, ma di senno maturo, asceso sul trono delle due Sicilie, ne promette il più ridente avvenire: ei non può non amare, e proteggere coloro che il somigliano. Invano sorgeranno contro te i malevoli, somiglianti a' cani che abbajano alla Luna, tanto più fortemente, quanto dal maggior chiarore di quella più oscura apparisce l' ombra loro. Sappi che le lor critiche invidiose mirano a distruggere quella natural confidenza che il Genio sente nelle forze del proprio ingegno, senza la quale ei non potrebbe spingersi ad alte meditazioni, ed un penoso avvilimento l' assalirebbe. Ma tu li vincerai col disprezzo, e con opere gloriose, ed eglino, veduta l'impotenza de' loro latrati, pur finalmente si taceranno.

Affrettati dunque a compiere le nostre speranze, e serbami fin d' ora nel numero de' tuoi amici.

Alberto Cortes

ESPOSIZIONE

DELL' ARGOMENTO.



La presente memoria verrà divisa in tre parti. Nella prima si esporrà la dimostrazione analitica di un teorema su' numeri perfetti, il quale trovasi nel 9. libro di Euclid, e vi si aggiungeranno molte altre cose non inutili sull' istesso argomento. Il Montucla stimando difficile il congegnare algebricamente questa dimostrazione, si esprime in tal modo nella sua Storia Matematica, Part. I., lib. 4. » *On y donne* (nel 9. lib. di Euclide) *la solution du problême de trouver un nombre parfait, c' est a dire, dont toutes les parties aliquotes réunies forment le nombre lui-même; problême qui traité même avec nos moyens actuels, exige un artifice particulier* * ».

Ma io mi lusingo che la dimostrazione da me ordita sia piuttosto semplice. Intanto per la facile intelligenza di essa è da sapersi che tutti i divisori non primi di un numero nascon da' prodotti bi

* Qui il Montucla, come saggiamente avverte V. Flauti nel preliminare della sua geometria, annunzia qual problema ciocchè forma un teorema nel 9 libro di Euclide.

narrii, ternarii, *etc.* de' suoi fattori primi*; la qual cosa rilevasi dal noto metodo di trovare tutti i divisori di un dato numero, e non ho creduto espediente di qui dimostrarla, e farne un Lemma, avendola appieno dimostrata nel mio trattato inedito di aritmetica, e di applicazione dell' algebra all' aritmetica.

La 2. parte avrà per oggetto la dimostrazione di una regola onde verificare se nella ricerca di tutti i divisori di un dato numero, se ne sia per inavvertenza trascurato alcuno. Egli è gran tempo che in un' aritmetica pratica rinvenni a caso la sola enunciazione di questa regola, della quale non avendo trovato alcun cenno in quante altre aritmetiche, o algebre ho avute per le mani, veduta la natura del soggetto appartenersi alla teoria delle combinazioni, mi feci ad escogitarne la dimostrazione, che è la qui esposta.

Nella 3. parte si darà una nuova soluzione analitica del problema di descrivere un cerchio che ne tocchi tre altri dati di sito, e di grandezza. Questo problema di Apollonio è stato da molti valenti geometri, e più che tutti da N. Fergola, risoluto elegantemente con l' analisi geometrica.

---

* Si può far differenza tra fattori, e divisori primi di un numero. Così 2, 2, e 3 sono i fattori primi del numero 12, e ne sono divisori primi i soli numeri 2, e 3.

Il Montucla nell' opera poc' anzi citata, Par. I, Lib. 4., così ragiona di tal problema.

» *Ce problême, un de ceux où l' analyse algébrique ne s' applique pas avec facilité, occupa Descartes, et de deux solutions qu' il en trouva, il convient lui-même, que l'une lui donnait une expression si compliquée, qu'il n' entreprendroit pas de la construire en un mois. L' autre quoique moins embarrassée, l' est encore assez, pour que Descartes n'ait osé y toucher, etc.* »

E qui fa meraviglia che l'eccellente istorico delle matematiche punto non parli di altre analitiche soluzioni, che de' sommi analisti han prodotte sull' istesso problema dopó il Cartesio. Nè, a dir vero, sono riusciti vani, come al Cartesio, i lor tentativi, ché tra le soluzioni da lor pubblicate ve n'ha alcune oltremodo ingegnose, e degne della massima attenzione. Tuttavia non giungono esse ad eguagliare in semplicità ed eleganza la soluzione del Fergola, e quanto più sono ingegnose le costruzioni che somministrano, tanto men direttamente derivano dalle condizioni del problema *. Ciò che io di-

* Quindi si è creduto finora che l' analisi non potesse risolver questo problema con pari eleganza, e semplicità della geometria. E l' istesso Fergola nella sua memoria delle tazioni, inserita nel I. Vol. degli Atti della nostra Accad. delle Scienze, afferma che molti problemi su'

co, può di leggieri osservarsi dalle migliori di siffatte soluzioni, che a tal uopo rapporterò prima di esporre la mia. Or venendo a far parole di questa mia soluzione, parmi che essa non abbia gl' indicati difetti, ed ha poi il doppio vantaggio di dare la medesima costruzione del Fergola, ed una facile ed èlegante composizione geometrica. Il metodo che vi ho impiegato è quello delle locali. I problemi determinati di geometria si posson risolvere, come ognun sa, in due maniere distinte, l'una cioè, combinando tutte insieme le condizioni de' punti cercati, e l' altra combinandone prima alcune, e quindi le rimanenti. Or io avvalendomi del secondo metodo, forse il più conducente ne' problemi di sito, ho ritrovato che il centro del cerchio da descriversi dee soddisfare a due condizioni, la prima delle quali, separatamente presa, dà origine ad una locale, e la seconda determina su questa locale il punto cercato.

Lascio a' dotti analisti il giudicare di questa soluzione, e passo a trattare l' assunto.

---

contatti circolari, condurrel lero ad equazioni *spaventevoli*, ed *immaneggiabili*. Tra questi ei senza dubbio vi comprese quello de' tre cerchi da farsi toccare da un quarto, da lui detto a ragione il più difficile tra tutti i problemi dell' istessa famiglia.

PARTE I.



Def. *Chiamasi numero perfetto, secondo la frase degli antichi, ogni numero eguale alla somma de' suoi divisori, eccetto il massimo che è il medesimo numedo, e compresavi l' unità.*

Or sia da cercarsi un numero perfetto che abbia un solo divisore primo a, e che dev' esser quindi una potenza di a. Rappresentandolo con a^m, i suoi divisori, eccetto il massimo, e compresavi l'unità, saranno $1, a, a^2, a^3 \ldots a^{m-1}$; onde per la condizione del problema sarà a^m eguale alla somma de' termini della progressione $\div\!\div 1 : a : a^2 : a^3 \ldots : a^{m-1}$, e per conseguenza eguale ad $\frac{a^m - 1}{a - 1}$. Da ciò si ricava

$$a^{m+1} = 2a^m - 1\text{, e dividendo per } a^m\text{, } a = 2 - \frac{1}{a^m}$$

equazione impossibile a soddisfarsi, qualunque sia il valore intero di m, e 'l numero primo eguale ad a. Dunque non vi può esser numero perfetto che abbia un solo divisore primo.

In secondo luogo debba cercarsi un numero perfetto che abbia due divisori primi a, e b. Suppongasi un tal numero m volte divisibile per a, ed n volte per b; onde sarà eguale ad $a^m b^n$, e tutti i suoi divisori, tranne il massimo, saranno i seguenti $1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots a^m$; $b, b^2, b^3 \ldots\ldots b^n$; ab, ab^2, $ab^3 \ldots\ldots ab^n$; a^2b, a^2b^2, $a^2b^3 \ldots\ldots a^2b^n$; a^3b, a^3b^2, $a^3b^3 \ldots\ldots a^3b^n$, e così di seguito fino ad a^mb, a^mb^2, $a^mb^3 \ldots\ldots a^mb^{n-1}$. La somma di tutti questi divisori, essendo eguagliata ad

$a^m b^n$, e poi aggiungendo $a^m b^n$ di comune, risulterà $2a^m b^n = (1 + a + a^2 + a^3 \ldots + a^m) + (b + b^2 + b^3 \ldots + b^n) + (ab + ab^2 + ab^3 \ldots + ab^n) + (a^2 b + a^2 b^2 + a^2 b^3 \ldots + a^2 b^n) \ldots + (a^m b + a^m b^2 + a^m b^3 \ldots + a^m b^n)$

Tali somme parziali, meno che la prima, contengon tutte il fattore comune $b + b^2 + b^3 \ldots + b^n$, il quale trovasi multiplicato per 1 nella seconda, per a nella terza, per a^2 nella quarta *etc.*, e per a^m nell'ultima; quindi riducendo sarà

$$2a^m b^n = 1 + a + a^2 \ldots + a^m + (b + b^2 + b^3 \ldots + b^n)(1 + a + a^2 + a^3 \ldots + a^m),$$

o sia

$$2a^m b^n = (1 + a + a^2 + a^3 \ldots + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n),$$

e sommando i termini di queste due progressioni, si avrà finalmente $2a^m b^n = \frac{a^{m+1} - 1}{b - 1} \times \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$, e perciò $2a^m b^n$ sarà decomponibile in due fattori eguali a quelli del secondo membro. Ma tutti i divisori di $2a^m b^n$ si formano dalla combinazione de' suoi fattori primi $2, a, a,$ *etc.*, $b, b,$ *etc.*; dunque da' medesimi saranno formati i due fattori del secondo membro. Ciò posto, non può supporsi che entri a nella formazione del fattore $\frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$, nè b nella formazione dell'altro $\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$, altrimenti sarebbe $\frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$, o sia $1 + a + a^2 + ec.$ divisibile per a, ed $1 + b + b^2 + etc.$ divisibile per b, ciocchè ripugna.

Quindi sarà $2a^m = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$, e $b^n = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$, apponendo il fattore 2 ad a^m, ovvero a b^n, come più aggrada.

Segue da ciò, che se uno de' divisori primi a, e b si supponga eguale a 2, dovrà esserlo a; mentre supponendo $b = 2$, sarebbe $\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} = 1 + b + etc.$ un numero impari, contro l'equazione $2a^m = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$.

Ponendo dunque $a = 2$ nell'equazioni $2a^m = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$, e $b^n = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$, si ha $2^{m+1} = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$, e $b^n = 2^{m+1} - 1$. Dalla seconda ricavasi $2^{m+1} = b^n + 1$, e sostituendo nella prima, verrà $b^n + 1 = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$; laonde

$$b^{n+1} - 1 = b^{n+1} + b^{n+1} + b - b^n - 1,$$

e riducendo, $b = b^n$, e perciò $n = 1$. Dunque supponendo $a = 2$, dev'esser necessariamente $n = 1$, e $b^n = b = 1 + a + a^2 \ldots + a^m = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots + 2^m$, d'onde nasce il seguente

TEOREMA.

Se dall' unità in poi si prendano de' numeri continuamente proporzionali in ragion doppia, finchè quel numero che risulta dalla somma di tutti questi termini sia primo, una tal somma multiplicata per l' ultimo di que' numeri proporzionali, darà per prodotto un numero perfetto.

Scol. Posta la medesima condizione che il cercato numero perfetto abbia due soli divisori primi a, e b, ne segue non poter essere entrambi diversi dal numero 2. Infatti riducendo le equazioni

$$2a^m = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}\ ,\ e\ b^n = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}\ ,$$

si ha $\quad 2(b-1)\ a^m = b^{n+1} - 1$,

ed $\quad (a-1)\ b^n = a^{m+1} - 1$.

Quindi $\dfrac{a^{m+1}}{2(b-1)a^m} = \dfrac{a}{2(b-1)} = \dfrac{(a-1)\ b^n + 1}{b^{n+1} - 1}$

e togliendo i denominatori ,

$a\,b^{n+1} - a = 2(a-1)(b-1)\ b^n + 2(b-1)$;

o sia $a\,b^{n+1} = 2(a-1)(b-1)\ b^n + 2(b-1) + a$.

La differenza di $2ab^{n-1}$ su di $2b^{n-1}$ è $b^{n-1}(2a-2)$;

e la differenza di ab^n su di $2b^n$

è $\quad b^n(a-2) = b^{n-1}\ b(a-2)$

Ma $b(a-2)-(2a-2)=b(a-2)-2-(2a-4)=b(a-2)-2-2(a-2)=(b-2)(a-2)-2$, quantità necessariamente positiva , giacchè nell' ipotesi che a , e b fossero entrambi diversi dal 2 , i loro minimi valori sono 3 , e 5. Dunque $b(a-2) > (2a-2)$,

e perciò $\quad b^{n-1}\ b(a-2) > b^{n-1}(2a-2)$,

o sia $\quad (ab^n - 2b^n) > 2ab^{n-1} - 2b^{n-1}$,

e quindi $\ (a\,b^n + 2b^{n-1}) > (2b^n + 2ab^{n-1})$.

Dunque $b(ab^n + 2b^{n-1} + 2) + a$ sarà molto maggiore di $2 + b(2b^n + 2a\,b^{n-1})$, contro l' equazione $b(ab^n + 2ab^{n-1} + 2) + a = 2 + b(2b^n + 2ab^{n-1})$; il perchè non può darsi numero perfetto che abbia due soli divisori primi, e ciascuno differente dal numero 2.

LEMMA.

Sia A un numero qualunque , ed mt il prodotto di due numeri interi m , e t , e per conseguenza un numero composto : dico che $A^{mt} - 1$ sia pure un numero composto.

Dim. Ella è verità dimostrata dagli analisti, che nella serie delle potenze 1, A, A^2, A^3, *etc.*, oltre al primo termine deve trovarsene un altro A^t, che diviso per un numero p primo con A dia l'unità per residuo, essendo t minore di p; e che di più i termini della forma A^{mt} divisi per l'istesso numero p debbon sempre rimanere l'unità per residuo. Ciò posto, si prenda il numero $p = A^m - 1$, e per conseguenza primo con A. Sarà A^m il minimo fra' termini della serie A, A^2, A^3, *etc.* che diviso per p dia per residuo l'unità, e conforme si è detto poc'anzi, anche A^{mt} diviso per p darà l'unità per residuo. Dunque $A^{mt} - 1$ sarà divisibile per p, e sarà quindi un numero composto. C. B. D.

Corol. Togliendo l'unità da ogni potenza di 2, il cui grado sia dinotato da un numero composto, il residuo sarà altresì un numero composto.

Corol. Nella progressione $\div$ 1 : 2 : 2^2 : 2^3 : *etc.* ove il numero de' termini sia generalmente rappresentato con m, la somma de' medesimi termini sarà espressa dalla formula $2^{m+1} - 1$, e pel corollario antecedente, questa somma non sarà mai un numero primo, quando $m + 1$ è un numero composto.

Avver. Quando $m + 1$ è un numero primo, non sempre avviene che sia $2^{m+1} - 1$ un numero anche primo. Infatti $2^{23} - 1$ è divisibile per 47, e $2^{11} - 1$ è divisibile per 23, ed 89. Dunque il teorema di sopra si può meglio enunciare nel seguente modo.

TEOREMA.

Se nella formula $2^r - 1$ si sostituiscano ad r de' numeri primi, e tali da rendere $2^r - 1$ un numero anche primo, il prodotto di questo numero per 2^{r-1} sarà un numero perfetto.

Darò termine a questo articolo con alcune ricerche sul problema generale di trovare un numero perfetto.

Tutti i prodotti semplici, binarii, ternarii, *etc.* di m elementi eguali ad a sono, com'è chiaro, a, a^2, a^3 . . . a^m. I nuovi prodotti che un altro elemento b aggiunge a' precedenti, debbon tutti avere b, altrimenti sarebbero gli stessi di a, a^2, a^3, . . . a^m; laonde questi nuovi prodotti saranno quelli che nascono multiplicando b per a, a^2, a^3 . . . . a^m, e 'l prodotto semplice b.

Accrescendo gli elementi a, a, *etc.* a, b di un altro elemento b, i nuovi prodotti che questo aggiunge a' prodotti di a, a, *etc.* a, b avranno tutti b^2 per l'istessa ragione di sopra, e saranno per conseguenza i prodotti di b^2 per a, a^2, a^3 . . . . a^m, e 'l prodotto binario b^2.

Aumentando gli elementi a, a, *etc.*, a, b, b di un altro elemento b, i nuovi prodotti che questo aggiunge a' prodotti antecedenti, cioè a quelli di a, a, *etc.*, a, b, b conterranno tutti b^3, e quindi saranno i prodotti di b^3 per a, a^2, a^3 . . . . a^m, e 'l prodotto ternario b^3, e così in appresso.

Corol. Dunque in generale, la somma di tutti i prodotti semplici, binarii, *etc.* che far si possono con m elementi eguali ad a, ed n eguali a b si ottie-

ne: sommando tutti i prodotti a, a^2, ... a^m degli m elementi, o fattori eguali ad a; multiplicando questa somma per $b + b^2 + b^3 \ldots\ldots + b^n$; sommando la medesima somma con questo prodotto, e con $b + b^2 + b^3 \ldots\ldots + b^n$.

Combinando inoltre l'elemento c agli elementi a, a, *etc.*, a, b, b, *etc.* b de' quali m sienò eguali ad a, ed n eguali a b, i nuovi prodotti che questo elemento aggiunge a' prodotti di a, a, *etc.*, a, b, b, *etc.*, b conterranno tutti c, e quindi saranno i prodotti di c per ciascuno de' prodotti di a, a, *etc.* a, b, b, *etc.*, b, e 'l prodotto semplice c.

Se oltre agli elementi a, a, *etc.*, a, b, b, *etc.* b, c se ne prenda un altro c, questo aggiungerà a' prodotti di a, a, *etc.*, a, b, b, *etc.*, b, c degli altri prodotti contenenti c^2, e che saranno in conseguenza i prodotti di c^2 per quelli di a, a, *etc.*, a, b, b, *etc.*, b, e 'l prodotto binario c^2. Così in seguito per un maggior numero di elementi eguali a c.

Cor. Quindi in generale, la somma di tutti i prodotti che posson farsi con m elementi o fattori eguali ad a, n eguali a b, ed r eguali a c, si ottiene: sommando i prodotti degli m elementi eguali ad a, ed n eguali a b; multiplicando una tal somma per

$$c + c^2 + c^3 \ldots\ldots + c^r;$$

aggregando quella somma con questo prodotto, e con

$$c + c^2 + c^3 \ldots + c^r.$$

Similmente ragionando, si troverà che la somma di tutti i prodotti fra m elementi eguali ad a, n eguali a b, r eguali a c, e p eguali a d, si ha: trovando la somma de' prodotti che si posson fare con gli m elementi eguali ad a, n eguali a b, ed r eguali a c; multiplicando questa somma per $d + d^2 + d^3 \ldots$

$+ d^p$; aggiungendo la medesima somma con questo prodotto, e con $d + d^2 + d^3 \ldots + d^p$. Così in appresso, qualunque sia il numero delle classi degli elementi eguali tra loro.

Cor. Il prodotto

$$(1 + a + a^2 \ldots . + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n)$$

essendo eguale ad

$$1 + (a + a^2 \ldots . + a^m) + (a + a^2 \ldots + a^m)(b + b^2 \ldots + b^n) + (b + b^2 \ldots + b^n)$$

per le cose antecedenti sarà eguale all'unità, più la somma di tutti i prodotti tra gli m elementi eguali ad a, ed n eguali a b. E chiamando A questa somma, sarà il medesimo prodotto eguale ed $1 + A$.

Cor. Il prodotto

$$(1 + a + a^2 \ldots . + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n)(1 + c + c^2 \ldots + c^r) = (1 + A)(1 + c + c^2 \ldots . + c^r) = 1 + A(c + c^2 \ldots + c^r) + A + (c + c^2 + c^3 \ldots . + c^r);$$

onde per quanto si è detto innanzi, sarà eguale all'unità, più la somma di tutti i prodotti con m elementi eguali ad a, n eguali a b, ed r eguali a c.

Così proseguendo, si dedurrà generalmente che il prodotto

$$(1 + a + a^2 \ldots + a^m)(1 + b + b^2 \ldots + b^n)(1 + c + c^2 \ldots . + c^r)(1 + d + d^2 \ldots . + d^p) \text{ etc.}$$

sia eguale all'unità insieme alla somma di tutti i prodotti che si hanno con m elementi eguali ad a, n eguali a b, r eguali a c, p eguali a d, *etc.*

Scol. Supponendo che il numero perfetto abbia tre divisori primi a, b, c, e che sia m volte divisibile per a, n volte per b, ed r volte per c, sarà eguale ad $a^m b^n c^r$, e l'unità più la somma di tutti i suoi divisori, cioè de' prodotti che far si possono con gli m fattori primi eguali ad a, n eguali a b, ed r eguali a c, sarà

$$(1+a+a^2\ldots.+a^m)(1+b+b^2\ldots+b^n)(1+c+c^2\ldots.+c^r).$$

Ma in questa somma di divisori è compreso anche il massimo che è l' istesso numero $a^m b^n c^r$; dunque si avrà l' equazione

$$a^m b^n c^r = (1+a+a^2\ldots+a^m)(1+b+b^2\ldots+b^n)(1+c+c^2\ldots+c^r) - a^m b^n c^r$$

o sia

$$2a^m b^n c^r = (1+a+a^2\ldots+a^m)(1+b+b^2\ldots+b^n)(1+c+c^2\ldots+c^r)$$

$$= \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{r+1}-1}{c-1}..$$

In generale si otterrà l' equazione

$$\frac{a^{m+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{r+1}-1}{c-1} \times \frac{d^{p+1}-1}{d-1} ec. = 2a^m b^n c^r d^p ec.,$$

nella supposizione che il numero perfetto avendo i divisori primi a, b, c, d, ec. sia rispettivamente divisibile per essi un numero m, n, p, q, ec: di volte; sicchè dal convenevole maneggio di siffatte equazioni dipende la soluzione generale del problema di trovare un numero perfetto. E ciò basti per l' oggetto prefissomi.

PARTE II.



LEMMA I.

Trovare il numero di tutte le possibili combinazioni che posson farsi con m diversi elementi a, b, c, d, ec.

Sol. Il numero delle combinazioni semplici è m; quello delle binarie è $\frac{m(m-1)}{2}$; quello delle ternarie è $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}$, e così in appresso fino alla combinazione di grado m.

Dunque il numero totale delle combinazioni onde sono suscettibili gli m diversi elementi a, b, c, ec. è

$$m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{2.3.}+ec.,$$

fino al numero m di termini. Or se a questo risultato aggiungasi l' unità, si avrà

$$1+m+\frac{(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{2.3}+ec.$$

fino ad $m+1$ termini. Ma per la formola di Newton quest' ultima espressione è uguale ad $(1+1)^m=2^m$, dunque 2^m rappresenta l'unità, più il numero totale delle combinazioni che far si possono con m diversi elementi, e perciò il total numero di siffatte combinazioni è 2^m-1.

LEMMA II.

Trovare il numero totale delle combinazioni che posson farsi con gli elementi . . . . ec.; p, p, p, ec.; q, q, q, ec.; a, b, c, d, etc. tra' quali ve ne sieno m differenti, ed espressi da a, b, c, d, etc. n eguali tra loro, e dinotati da q, q, q, ec. r anche eguali tra loro, e rappresenti da p, p, p, ec., e così in seguito.

Soluz. Il numero degli elementi q, a, b, c, d, ec. è $m+1$; quindi l' unità col numero totale delle loro combinazioni è 2^{m+1} (*Lem. prec.*). Rappresentiamo con A siffatte combinazioni, e si combini con gli ordinabili q, a, b, c, d, ec. l' altro ordinabile q, esaminando il numero di quelle combinazioni soltanto, che debbono differire dalle A, e che debbon tutte per conseguenza contenere qq. Di fatto se non contenessero qq, conterrebbero i soli elementi q, a, b, c, d, ec., e differir non potrebbero dalle combinazioni A. Contenendo tutte qq, è chiaro

1°. Che in esse vi sarà una sola combinazione binaria. 2°. Che le loro combinazioni ternarie oltre, di qq conterranno le combinazioni semplici di a, b, c, ec., e quindi saranno m di numero. 3°. Che le loro combinazioni quaternarie, oltre di qq conterranno le combinazioni binarie di a, b, c, ec. e quindi saranno $\frac{m(m-1)}{2}$ di numero . . . . . .

4°. Che finalmente la loro combinazione di grado $m+2$, oltre di qq conterrà la combinazione di grado m di a, b, c, d, ec. Dunque il Numero totale delle combinazioni che il nuovo elemento q aggiunge all' unità più le combinazioni di q, a, b, c, d ec.

è $$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + ec.$$

fino ad $m + 1$ termini. Ma questa serie per la formula di Newton è uguale ad $(1 + 1)^m = 2^m$, ed un tal numero aggiunto all'unità, più quello delle combinazioni A che è $2^{m+1} = 2 \times 2^m$, deve darci l'unità, più il numero totale delle combinazioni fra gli elementi q, q; a, b, c, d, $ec.$, le quali diremo B; dunque l'unità più il numero totale delle combinazioni B è $2 \times 2^m + 2^m = 3 \times 2^m$.

Combinisi inoltre agli elementi q, q; a, b, c, d, *etc.* il nuovo elemento q, esaminando come sopra il numero di quelle combinazioni soltanto, che debbono differire dalle combinazioni B, e che debbon tutte per conseguenza contenere qqq, dappoichè se contenessero i soli elementi a, b, c, d, *etc.*, o q con a, b, c, d, *etc.*, o qq con a, b, c, d, *etc.* non differirebbero punto dalle combinazioni B. Or queste nuove combinazioni diverse dalle B, contenendo tutte qqq, è chiaro

1. Che in esse vi sarà una sola combinazione ternaria. 2. Che le loro combinazioni quaternarie oltre di qqq conterranno le combinazioni semplici di a, b, c, d, *etc.* 3. Che le loro combinazioni quinarie oltre di qqq conterranno le combinazioni binarie di a, b, c, d, *etc.*, 4. Che finalmente la loro combinazione di grado $m + 3$, oltre di qqq conterrà la combinazione di grado m di a, b, c, d, *etc.* Dunque il numero delle combinazioni che il nuovo elemento q aggiunge alle combinazioni B pareggia il numero totale delle combinazioni di a, b, c, d, *ec.* ed è perciò eguale a 2^m. Ma questo numero aggiunto a quello delle combinazioni B, ed inoltre all'unità, cioè aggiunto a 3×2^m, deve dare l'unità più

il numero di tutte le combinazioni fra gli elementi q, q; q, a, b; c, d, cc.; quindi l'unità più il numero di siffatte combinazioni è $3 \times 2^m + 2^m = 4 \times 2^m$. In simil modo può dimostrarsi eguale a 5×2^m l'unità più il numero totale delle combinazioni fra gli elementi q, q, q, q; a, b, c, d, ec.

Ed in generale, se n è il numero degli uguali elementi q, q, q, cc., si avrà $(n+1)\,2^m$ per l'unità più il numero di tutte le combinazioni fra questi elementi, ed a, b, c, d, cc., supposto sempre eguale ad m il numero degli ordinabili a, b, c, d, etc.

Aggregandovi il nuovo elemento p, l'unità più il numero delle combinazioni di q,q,q,cc., p,a,b,c,d,cc.,le quali dinoteremo con C, sarà $(n+1)2^{m+1} = 2(n+1)\,2^m$, divenendo qui $m+1$ il numero degli ordinabili differenti p, a, b, c, d, cc. E combinandovi un altro elemento p, nelle nuove combinazioni diverse dalle C dovrà trovarsi pp, e perciò esse conterranno

1°. Una combinazione binaria. 2°. Tante combinazioni ternarie, per quante sono le combinazioni semplici q, q, q, cc.; a, b, c, d, cc. 3.° Tante combinazioni quaternarie, per quante sono le binarie combinazioni degli stessi elementi. 4°. Tante combinazioni di grado $m+n+2$ per quante sono le combinazioni di grado $m+n$ degli stessi elementi, cioè una. Dunque il numero delle nuove combinazioni differenti dalle C è quanto il numero delle combinazioni di q,q q, cc; a, b, c, d, cc., o sia $(n+1)2^m$. E perciò l'unità più il numero totale delle combinazioni di p; p; q, q, q, cc.; a, b, c, d, cc. sarà eguale a $2(n+1)2^m + (n+1)\,2^m = 3\,(n+1)\,2^m$. Così può dimostrarsi eguale a $4(n+1)2^m$ l'unità più il numero totale delle combinazioni fra gli elementi p.p.p; q, q, q, cc.; a, b, c, d, cc. Ed in generale l'unità

più il numero totale delle combinazioni di p, p, p *ec.*; q, q, q, *ec.*; a, b, c, d, *ec.*, è uguale ad $(r+1)(n+1)2^m$, supposto r il numero degli elementi p, n il numero degli elementi q, ed m quello di a, b, c, d, *ec.* È facile di continuare questo ragionamento quando vi sieno altri elementi eguali tra loro.

Avver. La dimostrazione è la stessa qualora gli m ordinabili a, b, c, d, *ec.* sieno anche eguali tra loro; ma in tal caso l'unità più il numero totale delle combinazioni di a, a, a, *ec.* è $1 + m$; quindi l'unità più il numero di tutte le combinazioni fra gli elementi q, q, q, *ec.*; p, p, p, *ec.*; a, b, c, d, *ec.* è

$$(r+1)(n+1)(m+1).$$

Dalle cose fin qui dette si raccoglie la seguente regola generale per trovare l'unità più il numero di tutte le possibili combinazioni fra quanti si vogliano ordinabili simili, o differenti, od in parte simili, ed in parte diversi.

REGOLA.

I numeri di volte che trovansi ripetuti gli elementi diversi, aumentati tutti dell' unità, si moltiplichino tra loro, ed il prodotto sarà eguale all' unità più il numero di tutte le possibili combinazioni fra' dati ordinabili.

Corol. Siccome tutti i divisori di un numero, esclusa l'unità, nascon dalle combinazioni semplici, binarie, *ec.*, cioè da tutte le combinazioni possibili de' suoi fattori primi; così la regola precedente servirà a trovare l'unità più il numero di tutte le combinazioni possibili de' medesimi fattori primi,

vale a dire il numero di tutti i divisori del numero dato, compresavi l'unità.

Esemp. i fattori primi del numero 360 sono 2, 2, 2, 3, 3, 5, de' quali il 2 è ripetuto tre volte, il 3 due volte, ed il 5 una volta. Questi numeri di volte 3, 2, ed 1, accresciuti dell' unità danno 4, 3, e 2, il cui prodotto $4 \times 3 \times 2 = 24$, e tanto sarà il numero di tutti i divisori di 360, compresavi l'unità.

PARTE III.

PROBLEMA.

Descrivere un cerchio che ne tocchi tre altri dati di sito, e di grandezza.

SOLUZIONE DI EULERO.

fig. 1. Suppone Eulero che A, B, C sieno i centri de' dati cerchi, a, b, c i loro raggi, O il centro di un cerchio che tocchi i tre dati al di fuori, ed x il raggio di esso; onde

$$OA = x + a\,,\quad OB = x + b\,,\quad OC = x + c\,.$$

Posta per brevità $OC = x + c = z$, $a - b = f$, $b - c = g$, $\frac{a^2 - f^2}{2} = \mathrm{F}$, $\frac{b^2 - g^2}{2} = G$, e chiamato C l'angolo ACB, ritrova l' equazione $Lz^2 - 2Mz + N = o$, nella quale $L = b^2f^2 + a^2g^2 - a^2b^2\ sen.^2C - 2abfg\ cos. C$, $M = b^2Ff + a^2Gg - ab\ cos.\ C\ (Gf + Fg)$, $N = b^2F^2 + a^2G^2 - 2abFG\ cos.\ C$.

Ma egli stesso confessa la difficoltà di costruire una tale equazione, dicendo: *Verum quia hoc problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet, quae utique nimis prodiret operosa, si cum ex aequatione* $Lz^2 - 2Mz + N = o$ *derivare vellemus, quamobrem hic plurimum juvabit talem constructionem ex ipsis calculi principiis derivasse.* Ed ecco in breve a che si riduce cotesta sua costruzione, che può riguardarsi come un' altra soluzione del problema. Pone egli eguale a ν la metà dell' an-

golo ACB, ed eguale a φ l'eccesso di v sul minore de' due angoli ACO, OCB, e facendo

$$\frac{(bF-aG)\cos v}{(aG+bF)\,sen.v}=tang.\theta,\ \frac{Gf-Fg}{\sqrt{b^2F^2+G^2-2abFG\cos.2v}}=sen.\lambda$$

ottiene $sen.\lambda = sen.(\theta+\varphi)$, $\varphi=\lambda-\theta$,

$$\varphi=180^\circ-\lambda-\theta,\ CO=\frac{F}{f+a\cos.(\gamma+\varphi)}.$$

Ma chi volesse effettuare questa costruzione, si avviserebbe che non può esser tenuta per semplice; quantunque meno implicata di quella che nasce dall'equazione $Lz^2-2Mz+N=0$.

Rapporterò per intero, ed esporrò nella maniera più chiara le due seguenti soluzioni, che per la loro importanza ne vaglion moltissimo la pena.

SOLUZIONE DI NICOLO' FUSS *.

Sieno A, B, C i centri de' dati cerchi α,β,γ i *fig.* 2. loro raggi, $AB=a$, $BC=b$, $AC=c$. Sia x il raggio, ed O il centro di un cerchio che tocchi i tre dati al di dentro. Si tirino le rette OA, OB, OC, e le perpendicolari OP, OQ sulle AC, e CB. Pongasi $OC=z$, $CP=p$, $CQ=q$; onde $z=x-\gamma$, $BO=z+\gamma-\beta$, $AO=z+\gamma-\alpha$, $AP=c-p$, $BQ=b-q$. Poichè

$$\overline{AO}^2-\overline{OC}^2=\overline{AP}^2-\overline{PC}^2 \text{ ed } \overline{OB}^2-\overline{OC}^2=\overline{QB}^2-\overline{QC}^2,$$

sarà ne' simboli

$$2z(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)^2=c^2-2cp,\ 2z(\gamma-\beta)+(\gamma-\beta)^2=b^2-2bq;$$

* Questa soluzione, e quella di *Eulero* si trovano negli atti di Pietroburgo an. 1788.

onde

$$p = \frac{c^2-(\gamma-\alpha)^2-2z(\gamma-\alpha)}{2c}, \text{ e } q = \frac{b^2-(\gamma-\beta)^2-2z(\gamma-\beta)}{2b}$$

$$\cos.ACO = \frac{p}{z}, \ \text{sen}.ACO = \sqrt{1-\frac{p^2}{z^2}}, \ \cos.BCO = \frac{q}{z},$$

$$\text{sen}.BCO = \sqrt{1-\frac{q^2}{z^2}}, \ \cos.ACB = \cos.(ACO+BCO)$$

$$= \frac{pq}{z^2} - \sqrt{1-\frac{p^2}{z^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{z^2}}, \ \text{sen}.ACB = \frac{q}{z}\sqrt{1-\frac{p^2}{z^2}} +$$

$$\frac{p}{z}\sqrt{1-\frac{q^2}{z^2}}, \ \text{sen.}^2 ACB = \frac{q^2}{z^2}\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right) + \frac{p^2}{z^2}\left(1-\frac{q^2}{z^2}\right) +$$

$$\frac{2pq}{z^2}\sqrt{1-\frac{p^2}{z^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{z^2}} = \frac{p^2}{z^2} + \frac{q^2}{z^2} - \frac{2pq}{z^2}\left(\frac{pq}{z^2} -\right.$$

$$\left.\sqrt{1-\frac{p^2}{z^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{z^2}}\right) = \frac{p^2}{z^2} + \frac{q^2}{z^2} - 2pq \cos.ACB.$$

In un cerchio qualunque il cui diametro si prenda
fig. 3. eguale all' unità, * l' arco RTS si supponga eguale a
fig. 2. $2ACB$ * e la corda $RT = \frac{2p}{z}$; sarà la corda $ST = \frac{2q}{z}$.

Infatti $\overline{RS}^2 = \overline{RT}^2 + \overline{TS}^2 - 2RT \times TS \cos.RTS$. Ma
fig. 2. $RS = 2\text{sen}.\ RTS$, e l'angolo $RTS = ACB$ *, $RT = \frac{2p}{z}$;
dunque sostituendo si avrà

$$4\,\text{sen}^2.\ ACB = \frac{4p^2}{z^2} + \overline{TS}^2 - \frac{2p}{z} \times TS \cos.ACB, \text{ o sia}$$

$$\text{sen.}^2 ACB = \frac{p^2}{z^2} + \frac{\overline{TS}^2}{4} - \frac{p}{z} \times \frac{TS}{2} \cos.ACB \text{ e parago-}$$

nando questa equazione con l'altra $sen.^2 ACB = \frac{p^2}{z^2} + \frac{q^2}{z^2} - \frac{2pq}{z^2} cos. ACB$, si avrà $TS = \frac{2q}{z}$. Ciò dimostrato, sia l'angolo $SRT = \varphi$, sarà $RST = 180^\circ - ACB - \varphi$, $ST = 2 sen. \varphi = \frac{2q}{z}$, $RT = 2 sen. (180^\circ - ACB - \varphi) = 2 sen. (ACB + \varphi) = \frac{2p}{z}$. Laonde $\frac{p}{z} = sen. (ACB + \varphi) = \frac{c^2 - (\gamma - \alpha)^2}{2cz} - \frac{\gamma - \alpha}{c}$, $\frac{q}{z} = sen. \varphi = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{2bz} - \frac{\gamma - \beta}{b}$, $sen. (ACB + \varphi) + \frac{\gamma - \alpha}{c} = \frac{c^2 - (\gamma - \alpha)^2}{2cz}$, $sen. \varphi + \frac{\gamma - \beta}{b} = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{2bz}$, con che si può formare la seguente proporzione $sen. (ACB + \varphi) + \frac{\gamma - \alpha}{c} : sen. \varphi + \frac{\gamma - \beta}{b} :: \frac{c^2 - (\gamma - \alpha)^2}{c} : \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{b}$, e ponendo per brevità $\frac{c^2 - (\gamma - \alpha)^2}{c} = f$, e $\frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{b} = g$, sarà $g\, sen. (ACB + \varphi) - f\, sen. \varphi = \frac{f(\gamma - \beta)}{b} - \frac{g(\gamma - \alpha)}{c} = h$. Da questa equazione si farà noto l'angolo φ, ed essendo $sen. \varphi = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{2bz} - \frac{\gamma - \beta}{b}$, si avrà $2z = 2CO = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b\, sen. \varphi}$.

Costr. Sieno A, B, C i centri de' dati cerchi, *fig.* 4. α, β, γ, i loro raggi rispettivi, C il centro del cerchio maggiore, $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$. Si pro-

lunghi CA in D finchè sia $AD = \gamma - \alpha$, e CB in E finchè sia $BE = \gamma - \beta$. Si tiri per C la retta FCG, e si faccia $FC = CA$, $CG = CB$, $CH = CA - AD$, $CI = CB - BE$, e congiunte le FD, e GE, si tiri HK parallela ad FD, ed IL parallela a GE. Si congiunga KL, e col centro K ed intervallo KL si descriva l'arco OLN. Si trovi la quarta proporzionale X dopo AC, CL, ed AD, e l' altra Z dopo BC, CK, BE. Si elevi sopra AC dal punto K la perpendicolare $KM = X - Z$, e per M si tiri parallelamente ad AC la retta OMN che incontri in O ed N l'arco OLN. Si unisca la KN che si protragga in P finchè sia KP eguale a CB. Dal punto P si abbassi la perpendicolare PQS sopra KL, e si faccia $QR = BE$, e $PS = CE$. Si tiri da P la $PT = CI$, e congiunta RT, le si tiri per S la parallela SV : dico essere $PV = 2z$.

Dim. Per la somiglianza de' triangoli FDC, ed HCK, $FC : CD :: HC : CK$, o sia $c : c + \gamma - \alpha ::$ $c - (\gamma - \alpha) : CK = \frac{c^2 - (\gamma - \alpha)^2}{c} = f$.

Così pe'triangoli simili CEG, CLI, $CG : CE ::$ $CI : CL$, vale a dire $b : b + \gamma - \beta :: b - (\gamma - \beta)$: $CL = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{b} = g$, e per la similitudine degli altri triangoli PRT, PSV, $PR : PT :: PS : PV =$ $\frac{PS \times PT}{PR}$. Ma $PS = CE = b + \gamma - \beta$, $PT = CI = b -$ $(\gamma - \beta)$, $PR = PQ + QR = PK \; sen.PKQ + \gamma - \beta$; dunque $PV = \frac{b^2 - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b \; sen.PKQ}$. Inoltre $sen.CKN =$ $sen.KNM = \frac{KM}{KN} = \frac{KM}{KL} = sen.(CKL - NKL)$; onde

$KM = KL(sen.CKL \; cos.NKL - sen.NKL \; cos.CKL)$.

Ma $cos.CKL = \frac{\overline{CK}^2 + \overline{KL}^2 - \overline{CL}^2}{2CK \, . \, KL}$; e $\overline{KL}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CL}^2 -$ $2CK . \; CL \; cos. \; KCL$; quindi $cos. \; CKL =$

$$\frac{2\overline{CK}^2 - 2CK . \; CL \; cos. \; KCL}{2CK . \; KL} = \frac{CK - CL \; cos. \; KCL}{KL}.$$

Ed essendo eziandio $sen. \; CKL = \frac{LC \; sen. \; KCL}{KL}$, sarà $KM = LC \; sen.KCL \; cos.NKL - CK \; sen.NKL + LC \; cos.KCL \; sen.NKL = LC \; sen. \; (KCL + NKL) - CK \; sen. \; NKL = g \; sen. \; (KCL + NKL) - f \; sen. \; NKL$. Ma

$$X = \frac{f(\gamma - \beta)}{b}, Z = \frac{g(\gamma - \alpha)}{c};$$

onde $KM = X - Z = \frac{f(\gamma - \beta)}{b} - \frac{g(\gamma - \alpha)}{c} = h =$ $g \; sen.(KCL + NKL) - f \; sen.NKL$. Ma si è avuto $h =$ $g \; sen.(KCL + \tau) - f \; sen.\varphi$; dunque $\varphi = NKL$, e perciò $PV = \frac{b - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b \; sen.\varphi} = 2z = 2CO$.

Avvertim. Congiunta la KO, e facendo su di essa la medesima costruzione fatta sulla KN, si avrà un altro valore di $2z$ soddisfacente al problema.

SOLUZIONE DI NEWTON *.



LEMMA.

fig. 5. *Descrivere un cerchio che passi pe' dati punti A, e B, e tocchi il dato cerchio EL.*

Soluz. Sia AEB il cerchio domandato, e C il suo centro. Si congiunga AB, che si prolunghi in L, e le si tirino le perpendicolari CD, ed FG. Si congiungano i centri C ed F con la retta CF, e si tiri FH parallela ad AL. Pongasi $AD = DB = a$, $DG = HF = b$, $GF = c$, $EF = d$, $DC = x$. Sarà $CH = x - c$, $\overline{CF}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HF}^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, $CB = \sqrt{a^2 + x^2} = CE$, $CF = CE + EF = d + \sqrt{a^2 + x^2}$, $\overline{CF}^2 = d^2 + a^2 + x^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$; onde $d^2 + a^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + c^2 - 2cx$, $2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + c^2 - d^2 - a^2 - 2cx = 2g^2 - 2cx$ (ponendo $b^2 + c^2 - d^2 - a^2 = 2g^2$), o sia $d\sqrt{a^2 + x^2} = g^2 - cx$, e quadrando, $d^2x^2 + d^2a^2 = g^4 - 2g^2cx + c^2x^2$, la quale equazione essendo costruita, farà trovare x, e quindi il centro C del cerchio da descriversi.

---

* *V. Arithmetica Universalis.*

PROBLEMA.

Descrivere un cerchio che passi pel dato punto A, e tocchi i cerchi IV, ed RS dati di sito, e di grandezza. *fig.* 61

Soluz. Sia *AIR* il cerchio domandato, e *D* il suo centro. Si congiungano le rette *AB*, *AC*, *AD*, *BD*, *CD*, e si tirino le perpendicolari *DE*, e *CK* sulla *AB*. Sarà $DB = AD + BR$, onde $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BR}^2 + 2AD.\,BR$, $\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + 2AE.\,AB$, e togliendo da questa la precedente equazione, risulterà $\overline{AB}^2 - \overline{BR}^2 - 2AD.\,BR = 2AE.AB$. Ma $\overline{AB}^2 - \overline{BR}^2 = (AB + BR)\,(AB - BR) = RAS$; dunque $RAS - 2AD.BR = 2AE.AB$, o sia $RAS - 2AE.AB = 2AD.BR$, onde $2AD = \frac{RAS - 2AE.AB}{BR}$. Così nel triangolo *DAC*, tirata la perpendicolare *DFG* sulla *CA*, si avrà $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$; quindi $\frac{TAV - 2CAF}{CT} = \frac{RAS - 2EAB}{BR}$, e $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2EAB}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$, $AF = \frac{CT}{2AC}\left(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2EAB}{BR}\right)$. Ma $AK : AC :: AF : AG = \frac{CAF}{AK} = \left(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2EAB}{BR}\right)\frac{CT}{2AH}$; laonde $AE - AG = EG = \frac{2KA.AE}{CT} \times \frac{CT}{2AK} - \left(\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2EAB}{BR}\right)\frac{CT}{2AK} = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2EAB}{BR} + \frac{2KAE}{CT}\right)$. Ed essendo *KC* a

$KA :: GE : ED$, sarà $ED = \frac{KA.GE}{KC} = \frac{CT}{2KC}\Big(\frac{RAS}{BR}$ $- \frac{TAV}{CT} - \frac{2EAB}{BR} + \frac{2KAE}{CT}\Big)$. In AB si prenda AP che stia ad AB come CT sta a BR; sarà CT a BR :: $2AP : 2AB$, e quindi $CT : 2AP :: BR : 2AB$, onde la quarta proporzionale dopo CT, $2AP$, ed AE sarà eguale alla quarta proporzionale dopo BR, $2AB$, ed AE, vale a dire

$$\frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}, \quad \frac{2BAE}{BR} - \frac{2KAE}{CT} = \frac{2PAE}{CT} - \frac{2KAE}{CT} =$$

$$\frac{2PK.AE}{CT}, \text{ e } DE = \frac{CT}{2KC}\Big(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2PK.AE}{CT}\Big).$$

Sopra AB si elevi la perpendicolare $AQ = \frac{CT}{2KC} \times$ $\Big(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}\Big)$, ed in essa prendasi $QO = \frac{PK.AE}{KC}$, onde $AO = ED$. Si congiungano le rette DO, DQ, e CP. Saranno simili i triangoli DOQ, CKP, essendo retti i loro angoli in O e K, e KC a PK :: $DO : OQ$; quindi gli angoli OQD, e KPC sono eguali, e se s' intenda prolungata la QD in X, sarà pure l'angolo $QDO = QYA = PYX$; onde l' angolo YXP sarà retto al par dell'altro QOD, e QDX perpendicolare su di CP. Sicchè conducendo AN parallela a CP, sarà retto l' angolo ANQ, e saranno simili i triangoli AQN, e PCK, onde $PC : CK :: AQ : AN =$ $\frac{CK.AQ}{PC} = \frac{CT}{2PC}\Big(\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}\Big)$. Si prolunghi AN in M, talchè sia $NM = AN$; sarà $AD = DM$, e 'l problema si ridurrà a descrivere un cerchio che passi pe' punti A, ed M, e tocchi i due cerchi proposti.

Cor. Si debba ora descrivere un cerchio che ne tocchi tre altri dati di sito, e di grandezza, i cui raggi sieno p. e. A, B, C. Co' centri de' cerchi che hanno i raggi B, e C, e con gl' intervalli $B \pm A$, $C \pm A$ si descrivano due cerchi, e se ne descriva un altro tangente ad entrambi, che passi per l' altro centro. Se G rappresenti il raggio di questo, il cerchio concentrico descritto col raggio $G \pm A$ toccherà i tre cerchi proposti.

La posizione di questa retta si determina osservando, che $x=o$ dà $z=-a$, e $z=o$ dà $x=\frac{a^2}{c}$; cosicchè prendendo $GI=\frac{a^2}{c}$ *, ed elevando sopra BD la perpendicolare $GF=a$, la retta passerà pe' punti I, ed F, e volendone computare le ascisse dal punto I, dovrà sostituirsi $\frac{a^2}{c}+x$ in luogo di x nell' equazione $z=\frac{cx}{a}-a$, con che verrà $z=\frac{cx}{a}$, e $z : x :: c : a$ **.

Così prendendo $gM=\frac{a'^2}{c'}$, e computando le ascisse x' dal punto M, sarà $z=\frac{c'x'}{a'}$, e quindi $z : x' :: c' : a'$, $\frac{z}{x'}=\frac{c'}{a'}$; ma dall' equazione $z=\frac{cx}{a}$ ricavasi $\frac{x}{z}$

---

* $\overline{EH}^2=y^2=\overline{EB}^2-\overline{BH}^2=\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2-(c-x)^2$ $=\frac{c^2x^2}{a^2}+a^2-2cx-c^2-x^2+2cx=\frac{c^2x^2}{a^2}-x^2+a^2$ $-c^2=\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2+a^2-c^2=\frac{c^2-a^2}{a^2}(x^2-a^2)$; d' onde, si vede che il valore di y è immaginario quando $x<a$. Ma $GI=\frac{a^2}{c}<a$, per essere $c>a$; dunque il punto H non può cadere fra' punti G ed I.

** Questa proprietà corrisponde all' altra dell'iperbole, che il ramo sta alla distanza del suo estremo dalla linea di sublimità, come l' eccentricità al semiasse primario.

$= \frac{a}{e}$; dunque $\frac{x}{z} \times \frac{z}{x'} = \frac{x}{x'} = \frac{ac'}{ca'}$, ed $x : x' :: ac' : ca'$. Laonde la posizione del punto E deve esser tale, che abbassate le perpendicolari EN ed EH sulle AB e BD, e congiunta EB, si abbia

1. $HI : MN :: ac' : ca' :: (a : c)(c' : a') :: a : m$, facendo $c' : a' :: c : m$. 2. $EB : HI$, o sia $z : x :: c : a$.

Cerchiamo in primo luogo la locale de' punti soddisfacenti alla prima di queste condizioni, il che si ottiene dal seguente

PROBLEMA LOCALE.

Date di sito le rette AB e BD, e dati in esse i punti I, ed M, trovar la locale di tutti i punti E tali che tirando le perpendicolari EH ed EN, stia costantemente HI ad $MN :: a : m$.

Soluz. Da' dati punti I, ed M si elevino le rette IO ed MO rispettivamente perpendicolari a BD, e BA, e dal loro punto d' incontro O si siri OQ parallela a BD, e si distenda fino ad incontrarne BA in Q. S' intenda congiunta OE, la HE prolungata in q, e condotta ES parallela a BD, ed EZ a BA. Pongasi $QO = f$, $QM = b$, $MO = d$, $OI = g$, e sia come sopra $IH = x$, $HE = y$. Poichè $HI : MN :: a : m$, sarà $MN = \frac{mx}{a}$, $QN = QM - MN = b - \frac{mx}{a}$. Ma $QM\ (b) : MO\ (d) :: QN\left(b - \frac{mx}{a}\right) : NR = \frac{d}{b}\left(b - \frac{mx}{a}\right) = d - \frac{mdx}{ab}$. Da un' altra parte $Eq = (g - y) : ER :: QN : QR :: QM :: QO ::$

$b : f$; quindi $ER = \frac{f(g-y)}{b}$, $NE = NR + ER = d - \frac{mdx}{ab} + \frac{f(g-y)}{b}$, $ZO = MO - EN = \frac{mdx}{ab} - \frac{f(g-y)}{b}$

Ma $\overline{ZO}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{ES}^2$, onde sostituendo si

avrà l' equazione

$$x^2 + (g-y)^2 = \frac{m^2x^2}{a^2} + \left(\frac{mdx}{ab} - \frac{f(g-y)}{b}\right)^2.$$

Sviluppando i quadrati, risulterà

$$x^2 + (g-y)^2 = \frac{m^2x^2}{a^2} + \frac{m^2d^2x^2}{a^2b^2} + \frac{f^2(g-y)^2}{b^2} - \frac{2mdfx(g-y)}{ab^2},$$ o sia $$x^2 = x^2\left(\frac{m^2b^2 + m^2d^2}{a^2b^2}\right) - (g-y)^2 + \frac{f^2(g-y)^2}{b^2} - \frac{2mdfx(g-y)}{ab^2} = m^2x^2\frac{b^2+d^2}{a^2b^2} + (g-y)^2\frac{f^2-b^2}{b^2} - \frac{2mdfx(g-y)}{ab^2}.$$

Ed essendo $b^2 + d^2 = f^2$, $f^2 - b^2 = d^2$,

sarà $$x^2 = \frac{m^2f^2x^2}{a^2b^2} + \frac{d^2(g-y)^2}{b^2} - \frac{2mdfx(g-y)}{ab^2} = \left(\frac{mfx}{ab} - \frac{d(g-y)}{b}\right)^2,$$ e quindi $x = \frac{mfx}{ab} - \frac{d(g-y)}{b}$ equazione alla retta, dalla quale ricavasi $y = g + \frac{ab - mf}{ad}x$. Dunque la locale addimandata è una retta, e per determinarne la posizione si osservi che quando x è zero, $y = g = IO$, per la qual cosa l'anzidetta locale passerà pel punto O. E dovendo inoltre passare per E, rimarrà fissata la sua posizione.

Costruz. Sopra IB si tagli ad arbitrio la IH, e sulla MB si tronchi MN quarta proporzionale dopo a, m, ed HI; talchè MN starà ad IH nella data ragione di m ad a. Ciò fatto, si elevino le perpendicolari HE ed NE, e si congiunga la retta EO: dico esser questa la locale cercata.

Dimost. Si tiri ES parallela a BD, ed EZ parallela a BA, e da un punto qualunque e preso su di OE si abbassi esh perpendicolare a BD, ed ezn perpendicolare a BA.

Si avrà $OE : Oe :: ZE : Zz :: SE : Ss$, e permutando $ZE : ES :: Zz : Ss$, o sia $MN : HI :: Mn :: Ih :: m : a$ C. B. D.

Determinata la posizione della retta EO che passa pel centro E, si può in diverse maniere trovar su di essa il punto E.



PRIMO METODO.

L'equazione $y^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - c^2 + a^2)$ che si è avuta nell'ultima nota, si riduca ad $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 - h^2)$, ponendo $c^2 - a^2 = h^2$. Sia $LG = k$, $y = \frac{px}{q}$ l'equazione della retta EO, prese le ascisse dal punto L, e quindi $y = \frac{p}{q}(k - x)$ l'equazione della medesima retta rapportata alle ascisse dal punto G. Se dunque si elimini y da siffatta equazione, e dell'altra $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 - h^2)$, si avrà l'equazione $\frac{p^2}{q^2}(k - x)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$.

Prendendo $LX = b$, e chiamando r la perpendicolare XY elevata sopra BD, sarà $\frac{p}{q} = \frac{b}{r}$, e l'equazione antecedente si ridurrà ad $a^2(k - x)^2 = r^2(x^2 - a^2)$, e costruita, darà due valori geometrici di x. Prese in ultimo dal punto G due ascisse eguali a questi valori, le positive verso B, e le negative verso D, le due perpendicolari erette sulla BD da' loro estremi, e distese fino alla retta LO determineranno i centri di due cerchi tangenti a'dati.

Avvert. Il centro corrispondente all'ascissa negativa è quello di un cerchio che tocca al di dentro tutti e tre i cerchi proposti. Di fatto se il punto E si supponga essere il centro di un tal cerchio, tutto il resto procederà come sopra, con la sola differen-

za che per essere allora $BE > ED$, il punto H non cadrà più tra B, e G; ma tra G, e D, e perciò l'ascissa corrispondente al punto E sarà negativa.

SECONDO METODO *.

Poichè la retta OE è data di sito, si conoscerà il rapporto di OE ad ES, che si esprime con $p : q$, onde $OE = \frac{px}{q}$.

Ma $BE = \frac{cx}{a}$; dunque $\frac{BE}{OE} = \frac{cq}{ap} = \frac{c}{r}$, ponendo $\frac{q}{p} = \frac{a}{r}$, o sia prendendo $Ex = a$, e chiamando r la perpendicolare xy elevata su di Ex e prolungata fino ad incontrare LO in g. Si congiunga la retta BO, e pongasi eguale a φ l'angolo ignoto OBE che fa con BO la retta BE tirata da B al centro del cerchio in quistione, e l'angolo noto BOE si dica O. Si avrà $sen.O : sen.\varphi :: BE : EO :: c : r$, e quindi $r\,sen.O = r\,sen.(180^\circ - O) = c\,sen.\varphi = c\,sen.(180^\circ - \varphi)$. Da questa equazione per le note formule trigonometriche si rileva, che se un triangolo abbia un lato eguale ad r, un altro eguale a c, e l'angolo opposto a c sia O, o $180^\circ - O$, sarà l'angolo opposto ad r, eguale a φ, o $180^\circ - \varphi$. Laonde se si faccia $OK = r$, e da K si tirino sulla BO le inclinate KC, e KP eguali a c, sarà l'angolo $KPO = KCO = \varphi$, o $180^\circ - \varphi$, e perciò tirando BE parallela a CK, e Bl parallela a KP, sarà l'angolo $OBE = \varphi$, o $180^\circ - \varphi$. Ma

* Questo secondo metodo è da preferirsi ad ogni altro.

quando le rette KP, e KC cadono a parti contrarie del punto O, non può esser l'angolo $EBO = OBl = 180^o - \varphi$, dal perchè i loro supplementi sarebbero eguali a φ; mentre in quel caso le rette LB ed EB prolungate verso B, non possono incontrare LOl. Se poi cadano dentro l'angolo acuto BOK, sarà per l'istessa ragione l'angolo $OBl = 180^o - \varphi$, e l'angolo $OBE = \varphi$.

Inoltre nulla è più facile del dimostrare geometricamente che $BE : EO :: c : r :: Bl : lO$. In effetti $BE : EO :: CK : KO :: c : r$, e $Bl : lO :: PK : KO :: c : r$.

Avver. Allorchè le rette KP e KC cadono a parti contrarie del punto O, anche le altre BE, e Bl, e perciò i punti E ed l cadranno a parti opposte del medesimo punto O. Ma per quanto si è dimostrato in una nota, la perpendicolare abbassata dal punto l sulla BD non può mai cadere fra' punti G ed I; cadrà dunque o fra G, e D, o sul prolungamento di GD verso D, ed il cerchio del centro l toccherà i tre dati al di dentro; mentre l'altro del centro E li toccherà al di fuori. Cadendo poi amendue le rette KP, e KC dentro l'angolo KOC, o KOP, secondochè sia acuto l'uno, o l'altro, tutti e due i cerchi de' centri E ed l toccheranno al di fuori, o al di dentro i tre cerchi proposti. E 'l problema sarà, com'è chiaro, insolubile, quando non si potranno inclinare le rette KC, e KP sulla CP, cioè quando la retta C non sarà maggiore della perpendicolare tirata da K sulla BO.

TERZO METODO.

Consiste il terzo metodo nel determinare la locale di tutti i punti E tali, che $BE : EO :: c : r$. Questa locale si troverebbe essere una circonferenza di cerchio, le cui intersezioni con la retta OE darebbero i punti cercati.

fig. 8. Cor. 1. Col problema antecedente rimane anche risoluto quest' altro: *date di sito le rette AB, e BC, non che le altre CF ed AE, trovare un punto H dal quale tirando le rette in paratesi* * *HK ed HI sopra AB, e BC, e prolungandole sino alle rette AE, e CF, sieno le KE ed IF, e la retta BH tirata dal punto H al punto B, eguali tra loro.*

fig. 7. Infatti la BE fu trovata eguale alle ordinate di due rette date di posizione.

Cor. 2. Nell' istessa maniera si risolverà il problema di descrivere un cerchio che ne tocchi due altri dati di sito, e di grandezza, e passi per un punto dato.

Scol. Il cerchio da descriversi tocchi due cerchi dati al di fuori, e l' altro al di dentro, come nella fig. 9., e sia E il suo centro. Sarà $EV = ET = EU$, $ED - EB = EU + UD - (ET - TB) = EU + UD - ET + TB = UD + TB$, e così $EA - EB = AV + BT$. Dunque invece delle differenze $DU - BT$, ed $AV - BT$, si prenderanno le somme $DU + BT$, ed $AV + BT$, e tutto il resto sarà come sopra. L' istesso avviene se il cerchio domandato tocchi al di

fig. 10. dentro due cerchi dati, e l' altro al di fuori; poi-

* Cioè ad angoli dati. *V.* Scorza. Divinazione sulla geometria analitica degli antichi.

chè in tal caso $ET = EV = EU$, $EB - ED = ET + TB - (EU - UD) = TB + UD$, e così $EB - EA = AV + BT$. Quindi la medesima soluzione farà trovare il centro dell' uno, e dell' altro cerchio, i quali centri si distingueranno secondo si è detto nell' ultimo avvertimento. Or non potendosi concepire altri casi diversi da' precedenti, resterà il problema completamente risoluto.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA

DEL PROBLEMA.

Pria di tutto si osservi nella fig. 7. che i due cerchi de' raggi *DU*, e *BT*, o s' intersegano, o stanno l' uno fuori dell' altro, o l' uno dentro l' altro senza esser concentrici, o finalmente sono concentrici. Ne' primi tre casi è facile il dimostrare la differenza de' raggi *DU*, e *BT* sempre minore di *BD*. Nell' ultimo caso la *BD* svanisce, e la soluzione antecedente non può aver luogo; ma la figura 11. ne mostra qual debba essere allora la soluzione. Sieno infatti *AP*, ed *AQ* i due cerchi concentrici, *EK* il terzo de' cerchi dati, e sia *BED* il cerchio da descriversi. Si tirino le rette *ABCD*, ed *FEC*. Sarà nota la retta *BD* eguale alla differenza de' raggi *AD* ed *AB*; quindi sarà pur noto il raggio *BC* del cerchio *EBD*, e saranno perciò note le *AC*, ed *FC*. Descrivendo adunque una circonferenza di cerchio col centro *A*, e col raggio *AC*, ed un' altra col centro *F*, e col raggio *FC*, le intersezioni *H*, e *C* di queste circonferenze saranno i centri di due cerchi che toccano i tre dati.

fig. 7. Negli altri casi, poichè $BE : EO :: c : r$, ed $EO : ES :: r : a$, per equalità $BE : ES :: c : a$.

Ciò posto, il punto *H* estremo della perpendilare *EH* si trovi in primo luogo fra' punti *B*, e *G*, o sul prolungamento di *GB* verso *B*: dico essere *E* il centro di un cerchio che vien toccato al di fuori da' tre cerchi proposti. Il punto *H* si può trovare fra' punti *I*, e *B*, o sul prolungamento di *IB* verso *B*, come nella figura 12, o fra' punti *I*, e *G* come nella figura 13. In ciascuno di questi casi si elevi so-

pra BD la perpendicolare GF eguale ad a, e congiunta FI, si destenda fino ad c la perpendicolare HE. Essendo GI terza proporzionale dopo c ed a, dovrà stare BG a $GF :: GF : GI :: cH : HI$. Ma $BG : GF :: BE : ES = HI$; dunque $cH : HI :: BE : HI$, e quindi $BE = cH$.

Nella figura 13. si congiunga BF, e prolungata EHe in T, si avrà $BG : GF :: BH : HT$. Ma $BG > GF$; dunque $BH > HT$, e quindi molto maggiore di He. Laonde BE che è maggiore di BH, sarà pure maggiore di He.

Ma le si è dimostrata eguale; dunque è impossibile che il punto H cada fra' punti G ed I, e perciò cadrà soltanto sul prolungamento di GI dalla parte del punto I, come nella figura 12. Ciò premesso, col centro E ed intervallo EB si descriva il cerchio BVL, la DE si prolunghi in P, e si faccia $GR = GH$. Per essere $GB = GD$, e $GR = GH$, sarà $HB = RD$, ed $HD - HB = HD - DR = HD - HV = DV = HR = 2GH$. Inoltre poichè $BE : HI :: c : a :: BG : GF$, sarà pure $2BE : 2HI :: 2BG : 2GF$ o sia $PL : 2HI :: BD : 2GF$, e quindi il rettangolo di PL in $2GF$ sarà eguale all' altro di BD in $2HI$. Ma $BG : GF :: GF : GI$, e perciò $BD : 2GF :: 2GF : 2GI$; dunque il rettangolo di BD in $2GI$ sarà eguale al quadrato di $2GF$, e la somma de' rettangoli di BD in $2HI$, e di BD in $2GI$, o sia il rettangolo di BD in $2GH$ o DV, sarà eguale alla somma del quadrato di $2GF$ col rettangolo di PL in $2GF$.

Si prolunghi LP in T, e si faccia $PT = 2GF$. Sarà il rettangolo di BD in DV, o il suo eguale di PD in DL quanto la somma del quadrato di PT col rettangolo di LP in PT, o sia quanto il rettangolo LTP. Aggiungendo al primo il quadrato di EL, ed

al secondo l' eguale quadrato di EP, risulterà il quadrato di ED eguale a quello di ET; quindi $ED=ET$, ed $LD = PT = 2a$. Ma LD è la differenza delle due
fig. 7. DE, ed EB, e $2a$ è la differenza de' raggi DU, e BT; dunque $DE - EB = DU - BT$, ed aggiungendo di comune $EB - DU$, risulterà $DE - DU = DU + EB - BT - DU = EB - BT$, o sia $EU = ET$. Similmente dimostrasi $ET = EV$; saranno quindi le EU, ET, EV eguali tra loro, ed i tre cerchi dati toccheranno al di fuori il cerchio che si descrive col centro E, e col raggio ET, o EV, o EU. C.B.D.

In secondo luogo il punto H cada fra' punti G, e D come nella figura 14; dico essere E il centro di un cerchio che vien toccato al di dentro da' tre cerchi proposti. Si prenda $GR = GH$; si descriva col centro E, e col raggio ED il cerchio DVL, e la BE si prolunghi in T. Si dimostrerà come sopra $BV = 2GH$, e poichè $BE : HI :: c : a$, si avrà $2BE : 2HI :: 2c : 2a :: BD : 2a$, e quindi $2BE \times 2a = 2HI \times BD$. Inoltre $c : a :: a : GI$, onde $2c : 2a :: 2a : 2GI$, e $BD \times 2GI =$ al quadrato di $2a$. Dunque $BD \times 2HI - BD \times 2GI = BD \times 2HG = DBV = TBL = 2BE \times 2a$ meno il quadrato di $2a$. Si faccia $EZ = 2a$, ed avremo $2BE \times EZ - \overline{EZ}^2 = 2BZ \times ZE + \overline{EZ}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{BZ}^2 = TBL = 2EL \times LB + \overline{BL}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{EL}^2$; onde $\overline{BZ}^2 = \overline{EL}^2$, $BZ = EL$, e quindi $EZ = BL = 2a$ è la differenza de' raggi DU, e BT (*fig.* 7) e BL (*fig.* 14) è uguale ad $EB - ED$; dunque (*fig.* 7) $EB - ED = DU - BT$, ed aggiungendo di comune $BT + ED$, risulterà $EB + BT = ED + DU$. Così dimostrasi $EB + BT = EA + AV$; quindi il cerchio de-

scritto col centro E, e col raggio $EB + BT$, o $ED + DU$, o $EA + AV$ sarà toccato al di dentro da' tre cerchi dati. C. B. D.

Avver. La medesima dimostrazione s' impiegherà negli altri due casi del problema.

Scol. La corrispondenza de' calcoli algebrici co' ragionamenti geometrici di questa soluzioue, si scorge a prima vista anche da coloro che sanno poco addentro in tali materie. Ma io mi propongo di mostrare più estesamente il passaggio dell' algebra alla geometria, ed i metodi di tal passaggio, che potrebbon chiamarsi antigeometrici, in un lavoro da me intrapreso or son tre anni, e trascurato finora per varie cagioni. Questo nuovo ramo di applicazione dell' algebra alla geometria, se non vado errato, sarà utilissimo nell' invenzione geometrica, ed accrescerà all' analisi quella perfezione ond' essa è capace.

FINE.

NOTA ALLA II. PARTE.

La seconda parte di questa memoria era già uscita dal torchio, quando nella teoria de' numeri di Legendre mi venne trovato un cenno della medesima dimostrazione sul numero di tutti i divisori di un numero dato. Parmi convenevole di rendere avvisati di ciò i lettori, i quali dal diverso andamento, e dalla generalità della mia dimostrazione scorgeranno che essa non ha potuto dipendere da quella che rapidamente, ed *a priori* ne dà il Legendre.



ERRATA.

pag. 10 *v.*	3	ab^u	ab^n
10	15	$\frac{b^{u+1} - 1}{b - 1}$	$\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$
11	9	$b^{n+1} + b^{n+1}$	l^{n+1}
21	33	$p.p.p$	$p, p, p,$
29	13	b — *ec.*	b^2 — *ec.*
31	15	*DFG*	*DGF*
39	3	ultima	penultima
40	2	tra *B*, e *G*; ma tra *G*, e *D*	dalla parte di *GD*; ma dall' altra di *GD*.

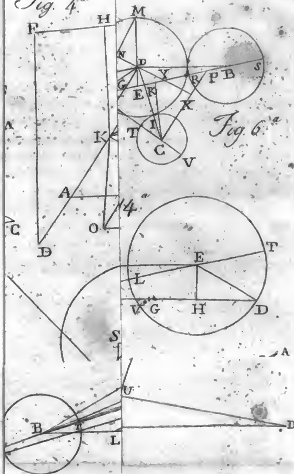


Fig. 4.ª
H
M
F
N
D
Y
R
P
B
S
G
E
K
X
Fig. 6.ª
A
K
T
I
C
V
A
14.ª
O
C
D
E
T
L
V
G
H
D
S
A
U
B
L
D

